



TITLE:

4次方程式 : Ferrari法 (数値解析の基礎理論とくに誤差解析の技法と実例)

AUTHOR(S):

平野, 菅保

CITATION:

平野, 菅保. 4次方程式 : Ferrari法 (数値解析の基礎理論とくに誤差解析の技法と実例). 数理解析研究所講究録 1972, 153: 212-225

ISSUE DATE:

1972-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106825>

RIGHT:

4 次方程式 (Ferrari 法)

東芝 平野 管保

§ 1. 序

4 次方程式を解く公式 Ferrari 法 (1522 ~ 1565) は、2 次方程式、3 次方程式 (Cardano 法 1501 ~ 1576) を解く公式と同様に、(最高次数 - 1) 次の係数を零にする座標変換によつて、得たい解に大きく誤差を導入する場合がある。この欠点は、その後に導きだされた 4 次方程式の解法、*1 Des-cartes 法 (1596 ~ 1650)、Euler 法 (1707 ~ 1783) でも何等ふれられていない。

そこで、今回、Ferrari 法を用いる場合の欠点、①「計算途中で桁落ち誤差が入る場合がある。(上記座標変換による誤差導入もこれによる。)」、②「計算途中で計算される 3 元 2 次方程式と 1 元 3 次方程式に変形して解くと、3 元 2 次方程式の解としては精度が悪い場合がある。」について述べ、その改良法について述べる。

§ 2. Ferrari 法の計算手順

与えられる4次方程式を次の(2-1)式とする。

$$(2-1) \quad a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0$$

a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 は複素係数

$$(2-1') \quad X^4 + (a_3/a_4)X^3 + (a_2/a_4)X^2 + (a_1/a_4)X + (a_0/a_4) = 0$$

$X = Y + \bar{X}$ とおく。

$$\begin{aligned} (2-2) \quad & Y^4 + \{4\bar{X} + (a_3/a_4)\}Y^3 \\ & + \{6\bar{X}^2 + 3(a_3/a_4)\bar{X} + (a_2/a_4)\}Y^2 \\ & + \{4\bar{X}^3 + 3(a_3/a_4)\bar{X}^2 + 2(a_2/a_4)\bar{X} + (a_1/a_4)\}Y \\ & + \{\bar{X}^4 + (a_3/a_4)\bar{X}^3 + (a_2/a_4)\bar{X}^2 + (a_1/a_4)\bar{X} + (a_0/a_4)\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

(2-2) 式の Y^3 の係数を零とする。

$$4\bar{X} + (a_3/a_4) = 0$$

$$(2-3) \quad \bar{X} = -(a_3/4a_4)$$

$$(2-2') \quad Y^4 + kY^2 + lY + m = 0$$

$$\begin{aligned} (2-4) \quad k &= 6\bar{X}^2 + 3(a_3/a_4)\bar{X} + (a_2/a_4) \\ &= (6/4^2 - 3/4)(a_3/a_4)^2 + (a_2/a_4) \\ &= -(3/8)(a_3/a_4)^2 + (a_2/a_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2-5) \quad l &= 4\bar{X}^3 + 3(a_3/a_4)\bar{X}^2 + 2(a_2/a_4)\bar{X} + (a_1/a_4) \\ &= (-4/4^3 + 3/4^2)(a_3/a_4)^3 - (2/4)(a_3 a_2/a_4^2) \\ &\quad + (a_1/a_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1/8)(a_3/a_4)^3 - (1/2)(a_3 a_2/a_4^2) + (a_1/a_4) \\
(2-6) \quad m &= \bar{X}^4 + (a_3/a_4)\bar{X}^3 + (a_2/a_4)\bar{X}^2 + (a_1/a_4)\bar{X} + (a_0/a_4) \\
&= (1/4^4 - 1/4^3)(a_3/a_4)^4 + (1/4^2)(a_3^2 a_2/a_4^3) \\
&\quad - (1/4)(a_3 a_1/a_4^2) + (a_0/a_4) \\
&= -(3/4^4)(a_3/a_4)^4 + (1/4^2)(a_3^2 a_2/a_4^3) \\
&\quad - (1/4)(a_3 a_1/a_4^2) + (a_0/a_4)
\end{aligned}$$

ここで、次の (2-7) 式を展開してみる。

$$(2-7) \quad (Y^2 + u)^2 = (vY + w)^2$$

$$(2-8) \quad Y^4 + (2u - v^2)Y^2 - 2vwY + u^2 - w^2 = 0$$

(2-2'), (2-8) 式で次数の等しい係数を等しいとする。

$$(2-9) \quad \begin{cases} k = 2u - v^2 \\ l = -2vw \\ m = u^2 - w^2 \end{cases} \quad (2-9') \quad \begin{cases} v^2 = 2u - k \\ v^2 w^2 = l^2/4 \\ w^2 = u^2 - m \end{cases}$$

(2-9') 式より v^2, w^2 を消去する。

$$(2-10) \quad (2u - k)(u^2 - m) = l^2/4$$

$$(2-10') \quad u^3 - (k/2)u^2 - mu + (mk/2) - l^2/8 = 0$$

(2-10') 式より得られる 3 つの解 u_1, u_2, u_3 のうち、いずれか 1 つの解を用いて v, w を求める。

$$(2-11) \quad \begin{cases} v = \sqrt{2u - k} \\ w = \sqrt{u^2 - m} \end{cases} \quad \text{又は} \quad w = -\sqrt{u^2 - m}$$

(2-11) 式の第 2 式の符号は (2-9) 式の第 2 式を満足するよ

うに決める。(2-10')式より求めた u および、その u を(2-11)式に代入して得られる v , w を用いて、(2-2')式を(2-12)式のように、2つの2次方程式に分解する。

$$(2-12) \quad (Y^2 + vY + u + w)(Y^2 - vY + u - w) = 0$$

(2-12)式の2つの2次方程式を解いて、4つの解 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 を求め、(2-1), (2-1')式の解 $X_i (i=1, 2, 3, 4)$ を次の(2-13)式で求める。

$$(2-13) \quad X_i = Y_i + \bar{X} \quad i=1, 2, 3, 4$$

注 (2-9')式を変形して(2-9'')式をつくる。

$$(2-9'') \quad u = (v^2 + k)/2$$

$$w^2 = (v^2 + k)^2/2^2 - m$$

$$v^2 w^2 = v^2 \{ (v^2 + k)^2/2^2 - m \} = l^2/4$$

$$(2-14) \quad v^2 \{ (v^2 + k)^2 - 4m \} = l^2$$

$$(2-14') \quad v^6 + 2kv^4 + (k^2 - 4m)v^2 + l^2 = 0$$

この(2-14')式はDescartes法およびEuler法で3次方程式を解くときと同じ係数になっている。(2-14')式で v^2 が求まれば、 u, w は次の(2-15)式で求められる。

$$(2-15) \quad \begin{cases} u = (v^2 + k)/2 \\ w = \sqrt{u^2 - m} \quad \text{又は} \quad w = -\sqrt{u^2 - m} \end{cases}$$

(2-15)式の第2式の符号は(2-9)式の第2式を満足するように決める。

(2-9') 式を変形して (2-9'') 式をつくる。

$$(2-9'') \quad v^2 w^2 = 2u w^2 - k w^2 = l^2/4$$

$$u^2 w^4 = (k w^2 + l^2/4)^2/4$$

$$w^6 = u^2 w^4 - m w^4$$

$$(2-16) \quad w^6 = (k w^2 + l^2/4)^2/4 - m w^4$$

$$(2-16') \quad w^6 + (m - k^2/4) w^4 - (k l^2/8) w^2 - l^4/4^3 = 0$$

(2-16') 式で w^2 を求め、 u , v は次の (2-17) 式で求める

$$(2-17) \quad \begin{cases} v = -l/(2w) \\ u = (v^2 + k)/2 \end{cases}$$

(2-13) 式により X_i を求める場合、次の (2-18) 式がなりたつと、(2-19) 式がなりたつ。

$$(2-18) \quad |X_i| \ll |\bar{X}| = |(a_3/4 a_4)|$$

$$(2-19) \quad |Y_i| \div |\bar{X}| = |(a_3/4 a_4)|$$

したがって、(2-13) 式より得られる解 X_i は、(2-18) 式の関係がなりたつと、 Y_i と \bar{X} の加算により桁落ち現象が起こり、有効桁数の減少、桁落ち誤差が大きくなる。この (2-13) 式での桁落ち誤差は (2-3) 式の \bar{X} を (2-4), (2-5), (2-6) 式に代入して得られる (2-2') 式の係数 k , l , m を用いて計算する限り、(2-7) 式以下 (2-12) 式までの計算式をどのように変形しても防ぐことができない。

4 次方程式 (2-1') 式の解 X_1 , X_2 , X_3 , X_4 と (2-3) 式の \bar{X} と

の関係は、解と係数との関係より (2-20) 式で得られる。

$$(2-20) \quad \bar{X} = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) / 4$$

この (2-20) 式より、解 X_1, X_2, X_3, X_4 の絶対値が共に \bar{X} の絶対値より小さいことはありえない。したがって、

$$(2-21) \quad |X_1| \geq |\bar{X}|, |X_2| \ll |\bar{X}|, |X_3| \ll |\bar{X}|, |X_4| \ll |\bar{X}|$$

とすると、(2-1') 式の解と係数との関係は

$$(2-22) \quad (a_3/a_4) = -(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \doteq -X_1$$

$$\begin{aligned} (a_2/a_4) &= X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4 \\ &\doteq X_1(X_2 + X_3 + X_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1/a_4) &= -(X_1X_2X_3 + X_2X_3X_4 + X_3X_4X_1 + X_4X_1X_2) \\ &\doteq -X_1(X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_2) \end{aligned}$$

$$(a_0/a_4) = X_1X_2X_3X_4$$

で表わされ、(2-3), (2-4), (2-5), (2-6) 式の \bar{X} , k , l , m は次のようになる。

$$(2-23) \quad \bar{X} \doteq X_1/4$$

$$k \doteq -(3/8)X_1^2 + X_1(X_2 + X_3 + X_4) \doteq -(3/8)X_1^2$$

$$l \doteq -(1/8)X_1^3 + (1/2)X_1^2(X_2 + X_3 + X_4)$$

$$-X_1(X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_2) \doteq -(1/8)X_1^3$$

$$m \doteq -(3/4^4)X_1^4 + (1/4^2)X_1^3(X_2 + X_3 + X_4)$$

$$-(1/4)X_1^2(X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_2) + X_1X_2X_3X_4$$

$$\doteq -(3/4^4)X_1^4$$

(2-2')式は、(2-23)式により、次の(2-24)式になる。

$$(2-24) \quad Y^4 - (3/8)X_1^2 Y^2 - (1/8)X_1^3 Y - (3/4^4)X_1^4 = 0$$

(2-24)式を因数分解すると、(2-25)式ができる。

$$(2-25) \quad (Y + X_1/4)^3 (Y - 3X_1/4) = 0$$

$$(2-26) \quad Y_1 = 3X_1/4, \quad Y_2 = Y_3 = Y_4 = -X_1/4$$

(2-13)式と(2-23)式の \bar{X} を用いて、解 X_i ($i=1, 2, 3, 4$)を求めると、(2-27)式のように、解 X_2, X_3, X_4 は誤差のみになる。

$$(2-27) \quad X_1 = Y_1 + \bar{X} = 3X_1/4 + X_1/4 = X_1$$

$$X_i = Y_i + \bar{X} = -X_1/4 + X_1/4 \doteq \varepsilon \quad \varepsilon : \text{誤差}$$

$$(i=2, 3, 4)$$

§ 3. Ferrari 法の修正計算手順

1つの解 X_4 の絶対値のみが(2-13)式の \bar{X} の絶対値より小さいときは、次の(3-1)式で求められる。

$$(3-1) \quad X_4 = a_0 / (a_4 X_1 X_2 X_3)$$

したがって、3つの解に(2-13)式の計算で桁落ち誤差が入らぬようにしなければならない。

(2-2)式の Y の係数を零にしてみる。

$$(3-2) \quad 4\bar{X}^3 + 3(a_3/a_4)\bar{X}^2 + 2(a_2/a_4)\bar{X} + (a_1/a_4) = 0$$

座標変換に用いる \bar{X} の絶対値はなるべく小さい値であることが望ましい。そこで、解 X_1, X_2, X_3, X_4 の間に(3-3)式の関係がある場合を考える。

$$(3-3) \quad |X_1| \gg |X_2| \gg |X_3| \gg |X_4|$$

$$(3-4) \quad a_3/a_4 = -(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \doteq -X_1$$

$$a_2/a_4 = X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_1 + X_1X_3 + X_2X_4 \doteq X_1X_2$$

$$a_1/a_4 = -(X_1X_2X_3 + X_2X_3X_4 + X_3X_4X_1 + X_4X_1X_2)$$

$$= -X_1X_2X_3$$

$$a_0/a_4 = X_1X_2X_3X_4$$

(3-4) 式より、(3-2) 式は次の(3-2') 式になる。

$$(3-2') \quad 4\bar{X}^3 - 3X_1\bar{X}^2 + 2X_1X_2\bar{X} - X_1X_2X_3 = 0$$

$$(3-5) \quad \bar{X}_1 = 3X_1/4, \quad \bar{X}_2 = 2X_2/3, \quad \bar{X}_3 = X_3/2$$

\bar{X} の値を $X_3/2$ として、(2-2) 式の Y^3 , Y^2 , Y^0 の係数を求める

$$Y^3 \text{ の係数 } 4\bar{X} + (a_3/a_4) = 2X_3 - X_1 \doteq -X_1$$

$$Y^2 \text{ の係数 } 6\bar{X}^2 + 3(a_3/a_4)\bar{X} + (a_2/a_4)$$

$$= 6(X_3/2)^2 - 3X_1(X_3/2) + X_1X_2 \doteq X_1X_2$$

$$Y^0 \text{ の係数 } \bar{X}^4 + (a_3/a_4)\bar{X}^3 + (a_2/a_4)\bar{X}^2 + (a_1/a_4)\bar{X} + (a_0/a_4)$$

$$= (X_3/2)^4 - X_1(X_3/2)^3 + X_1X_2(X_3/2)^2 - X_1X_2X_3(X_3/2)$$

$$+ X_1X_2X_3X_4 \doteq -X_1X_2(X_3/2)^2$$

したがって、(2-2) 式は(3-6) 式になる。

$$(3-6) \quad Y^4 - X_1Y^3 + X_1X_2Y^2 - X_1X_2(X_3/2)^2$$

$$\doteq \{Y^2 - X_1Y + X_1(X_3/2)\} \{Y^2 - X_2Y - X_2(X_3/2)\}$$

$$\doteq (Y - X_1)(Y - X_3/2)(Y - X_2)(Y + X_3/2)$$

$$(3-7) \quad Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = X_3/2, \quad Y_4 = -X_3/2$$

(3-7) 式の Y_i ($i=1, 2, 3, 4$) を (2-13) 式に代入する。

$$(3-8) \quad X_1 = Y_1 + \bar{X} = X_1 + X_3/2 \div X_1$$

$$X_2 = Y_2 + \bar{X} = X_2 + X_3/2 \div X_2$$

$$X_3 = Y_3 + \bar{X} = X_3/2 + X_3/2 = X_3$$

$$X_4 = Y_4 + \bar{X} = -X_3/2 + X_3/2 \div \varepsilon \quad \varepsilon: \text{誤差のみ}$$

絶対値の大きい解より順次 X_1, X_2, X_3 までは得られるが、絶対値の一番小さい解 X_4 は求められない。(解 X_4 は (3-1) 式に桁落ち誤差の入らぬ解 X_1, X_2, X_3 を代入して求める。)

前記のことより、(3-2) 式の 3 つの解 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ のうちで絶対値の一番小さい解を \bar{X} として採用する。

$$(3-9) \quad |X_{i\min}| = \min_{i=1,2,3} (|X_i|)$$

$$(3-9') \quad \bar{X} = \bar{X}_{i\min}$$

このように、(2-2) 式の Y の係数が零になる座標変換を行なって (3-10) 式を得てから、次の (3-11) 式の変数変換を行ない (2-2') 式の形、(3-12) 式に変形する。

$$(3-10) \quad Y^4 + k'Y^3 + l'Y^2 + m' = 0$$

$$(3-11) \quad Y = 1/Z$$

$$(3-12) \quad Z^4 + kZ^2 + lZ + m = 0$$

$$k = l'/m'$$

$$l = k'/m'$$

$$m = 1/m'$$

注 (3-3) 式の条件では、 $Z_i (i=1, 2, 3, 4)$ は次のよう

$$\begin{aligned} \text{になる。} \quad Z_1 &= 1/X_1 & Z_2 &= 1/X_2 \\ Z_3 &= 2/X_3 & Z_4 &= -2/X_3 \end{aligned}$$

次に、(2-16) 式を解く。得られる 3 つの解 u_1, u_2, u_3 をそれぞれ (2-10) 式に代入すると、次の (3-13) 式のように、左辺と右辺とが明らかに等しくならない場合がある。

$$(3-13) \quad (2u_i - k)(u_i^2 - m) \neq l^2/4 \quad i=1, 2, 3$$

そこで、(3-13) 式に用いた u_i を (2-16) 式に代入する。

$$(3-14) \quad u_i^3 - (k/2)u_i^2 - mu_i + (km/2) - l^2/8 = \varepsilon_i$$

$$i=1, 2, 3$$

u_i は (2-16) 式の解であるから、 ε_i は (3-15) 式で表わされる。

$$(3-15) \quad \varepsilon_i = \max(|u_i^3|, |(k/2)u_i^2|, |mu_i|, |(km/2) - l^2/8|) \cdot 10^{-n}$$

n : 計算桁数

(3-14) 式を (3-13) 式のように変形して (3-16) 式を得る。

$$(3-16) \quad \{u_i - (k/2)\} \{u_i^2 - m\} = l^2/8 + \varepsilon_i$$

すなわち、(3-16) 式の右辺に ε_i 程度の誤差が入り、(3-17) 式がなりたつと、(3-13) 式のようになる。

$$(3-17) \quad |l^2/8| \ll |\varepsilon_i|$$

(3-17) 式がなりたつと、(3-16) 式で次の 3 通りが考えられる

$$(3-18) \quad \begin{aligned} \text{①} \quad u_i &\doteq k/2 \quad (u_i^2 \neq m) & u_i - k/2 &= \varepsilon_{i1} \\ \text{②} \quad u_i^2 &\doteq m \quad (u_i \neq k/2) & u_i^2 - m &= \varepsilon_{i2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad u_i \doteq k/2, \quad u_i^2 \doteq m \quad u_i - k/2 = \varepsilon_{i1}$$

$$u_i^2 - m = \varepsilon_{i2}$$

$\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$: 誤差のみ

①の場合、(2-11)式の第1式より v を求めると、次に示すように誤差のみになるので、 v については(2-9)式の第2式を用いて、(3-19)式より求める。

$$v = \sqrt{2u_i - k} = \sqrt{2\varepsilon_{i1}}$$

$$(3-19) \quad v = -l/(2w) = -l/(2\sqrt{u_i^2 - m})$$

②の場合、(2-11)式の第2式より w を求めると、誤差のみになるので、 w については(2-9)式の第2式を用いて、(3-20)式より求める。

$$w = \sqrt{u_i^2 - m} = \sqrt{\varepsilon_{i2}}$$

$$(3-20) \quad w = -l/(2v) = -l/(2\sqrt{2u_i - k})$$

③の場合は次の(3-21)式の条件を満足する

$$(3-21) \quad |u_i| \doteq |k/2| \quad |u_i^2| \doteq |m| \doteq |k^2/4|$$

したがって、(3-14)式では、第1項より第4項まで(3-22)式がなりたち、(3-15)式の ε_i は(3-23)式で表わされる。

$$(3-22) \quad |u_i^3| \doteq |(k/2)u_i^2| \doteq |mu_i| \doteq |km/2|$$

$$(3-23) \quad \varepsilon_i = |km/2| \cdot 10^{-n}$$

ところが、(3-16)式の左辺の誤差 $\bar{\varepsilon}_i$ の絶対値は(3-25)式で表わせる。

$$(3-24) \quad \begin{aligned} u_i - (k/2) &= \varepsilon_{i1} & |\varepsilon_{i1}| &= |k/2| \cdot 10^{-n} \\ u_i^2 - m &= \varepsilon_{i2} & |\varepsilon_{i2}| &= |m| \cdot 10^{-n} \end{aligned}$$

$\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$: 誤差のみ

$$(3-25) \quad \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_i &= |\{u_i - (k/2)\}(u_i^2 - m)| = |\varepsilon_{i1} \cdot \varepsilon_{i2}| \\ &= |km/2| \cdot 10^{-2n} \end{aligned}$$

すなわち, (2-10)式で求めた解 u_i は, (2-10)式に代入すると (3-24), (3-25)式のようにはならず, (3-26)式になる.

$$(3-26) \quad |\{u_i - (k/2)\}(u_i^2 - m)| = \varepsilon_i = |km/2| \cdot 10^{-n}$$

それでは, (3-24), (3-25)式のようになる u_i はどのようにして求めるか。 u_i を次の(3-27)式のようにおき, (2-10)式に代入する。

$$(3-27) \quad u_i = \tilde{u}_i + k/2$$

$$2u_i - k = 2\tilde{u}_i$$

$$u_i^2 - m = \tilde{u}_i^2 + k\tilde{u}_i + (k/2)^2 - m$$

$$(2u_i - k)(u_i^2 - m) = 2\tilde{u}_i \{ \tilde{u}_i^2 + k\tilde{u}_i + (k/2)^2 - m \}$$

$$(3-28) \quad \tilde{u}_i^3 + k\tilde{u}_i^2 + \{(k/2)^2 - m\}\tilde{u}_i = l^2/8$$

$$(3-28') \quad (2\tilde{u}_i)^3 + 2k(2\tilde{u}_i)^2 + (k^2 - 4m)(2\tilde{u}_i) - l^2 = 0$$

(3-28)式を変形した(3-28')式は(2-14)式と同形になっている。
。(3-28)式を用いて得られる3つの解の中で、絶対値の一番小さい解を \tilde{u}_i として, (3-27)式より u_i を求める。

u_i を(2-11)式に代入して v, w を求めるが、桁落ちは $v,$

w 共に起るので、有効桁数の多い v (又は w)を用いて、次のように w (又は v)を求める。

$$(3-29) \quad w = -l/(2v) \quad \text{又は} \quad v = -l/(2w)$$

u, v, w が求められたならば、(2-12)式の2つの2次方程式の定数項を次の(3-30)式で計算する。

$$(3-30) \quad u + w = u + \sqrt{u^2 - m}$$

$$u - w = u - \sqrt{u^2 - m}$$

(3-30)式で次の(3-31)式がなりにつと、(3-30)式の代りに、(3-30')式を採用する。

$$(3-31) \quad |u^2| \gg |m|$$

$$(3-30') \quad |u + w| > |u - w| \quad \text{ならば}$$

$$u + w = u + \sqrt{u^2 - m}$$

$$u - w = m/(u + \sqrt{u^2 - m}) = m/(u + w)$$

$$|u + w| < |u - w| \quad \text{ならば}$$

$$u - w = u - \sqrt{u^2 - m}$$

$$u + w = m/(u - \sqrt{u^2 - m}) = m/(u - w)$$

2次方程式は次のようにして解く。

$$(3-32) \quad Z^2 + aZ + b = 0$$

$$(3-33) \quad |-(a/2) + \sqrt{(a/2)^2 - b}| > |-(a/2) - \sqrt{(a/2)^2 - b}| \quad \text{ならば}$$

$$Z_1 = -(a/2) + \sqrt{(a/2)^2 - b}, \quad Z_2 = b/Z_1$$

$$|-(a/2) + \sqrt{(a/2)^2 - b}| < |-(a/2) - \sqrt{(a/2)^2 - b}| \quad \text{ならば}$$

$$Z_1 = -(a/2) - \sqrt{(a/2)^2 - b}, \quad Z_2 = b/Z_1$$

$$\text{ただし } |(a/2)^2| \gg |b|$$

最後に4つ得られた解 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 を(3-11), (2-13)式に代入して、(2-1)式の解 X_1, X_2, X_3, X_4 を求める。次に、解 X_1, X_2, X_3, X_4 の中で絶対値の一番小さい解は精度が悪いので、それ以外の3つの解を用いて求める。

*1 村勢一郎著 方程式論 東海書房